

Actuariat et data mining: prise en compte des dépendances

Arthur Charpentier

ENSAE-CREST, France
arthur.charpentier@ensae.fr

Résumé. Cet article vise à présenter un outil central en modélisation et en représentation de la dépendance entre risques: les copules. La corrélation n’ayant pas de motivation en assurance, il convient de pouvoir utiliser des notions plus générales, et nous verrons que les rangs sont en particulier des notions de première importance. Nous évoquerons également les problèmes de corrélations entre événements extrêmes, particulièrement importants en gestion des risques.

1 Introduction et motivation

Les problèmes de dépendance et de corrélation en assurance ne sont pas nouveaux. On prendra d’ailleurs le terme “*corrélation*” au sens littéraire du terme, c’est à dire un “*rapport de dépendance dû à un lien de cause à effet, ou un lien créé par une cause commune, déterminée ou non*”. En particulier on le distinguera de la notion de “*mesure de corrélation au sens de Pearson*”, correspondant au coefficient (usuel) de corrélation (dont les propriétés seront évoquées dans la Section. 2).

Frees et Valdez (1995) avait ainsi proposé une revue de la littérature sur les copules, et en particulier les copules archimédiennes, en présentant des applications en assurance, avec en particulier les “*corrélations*” entre les durées de vie dans un couple et l’impact sur la tarification des primes sur deux têtes (assurance au dernier survivant, ou assurance veuvage), ou bien sur la tarification de contrats de réassurance, avec la séparation entre les coûts des sinistres (avec un traité non-proportionnel avec franchise) et les frais associées (partagés *pro rata capita*).

Dans le premier cas, si T_x et T_y désignent les durées de vie résiduelles d’un homme et d’une femme respectivement d’âge x et y à la signature du contrat, on peut ainsi écrire les annuités (c’est à dire les primes pour le versement d’un capital unitaire à terme échu) vie-jointes sous la forme

$$a_{xy:n} \ulcorner = \sum_{k=1}^n v^k \mathbb{P}(T_x > k \text{ et } T_y > k) = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_{xy},$$

en utilisant les notations classiques d’assurance-vie, où ${}_k p_x = \mathbb{P}(T_x > k)$ désigne la probabilité qu’une personne d’âge x aujourd’hui soit encore en vie dans k années. Les annuités au dernier survivant s’écrivent sous la forme

$$a_{\overline{xy}:n} \ulcorner = \sum_{k=1}^n v^k \mathbb{P}(T_x > k \text{ ou } T_y > k) = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_{\overline{xy}},$$

ou encore, pour les annuités veuvage, on peut écrire

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_y > k | T_x > k) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_y - \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_{xy}$$

où ${}_k p_{xy} = \mathbb{P}(T_x > k \text{ et } T_y > k)$.

Dans le second cas, reprenons l'exemple du traité de réassurance, où X est le coût d'un sinistre (c'est à dire l'indemnité versée par l'assureur à l'assuré en cas de survenance d'un sinistre), et Y le montant des frais associés (frais d'expertise, frais d'avocats...). Considérons un traité de réassurance en excès, de priorité d , où le réassureur verse une indemnité de la forme suivante

$$g(X, Y) = \begin{cases} 0, & \text{si } X \leq d, \\ X - d + \frac{X - d}{X} \cdot Y, & \text{si } X > d. \end{cases}$$

La prime pure est alors $\mathbb{E}(g(X, Y))$ qui nécessite la connaissance de la loi jointe du couple (X, Y) puisque g est une fonction non-linéaire.

Au delà de l'utilisation des copules (présentées dans la Section 3, largement étudiées dans Denuit et Charpentier (2004), ou Denuit *et al.* (2005) pour modéliser les risques, et donc calculer des primes, nous verrons que les copules sont également utiles pour l'exploration des données, afin de mieux comprendre comment se comporte la corrélation entre les risques.

2 La corrélation comme mauvaise mesure de dépendance

La "mesure de corrélation au sens de Pearson" est souvent utilisée comme mesure de dépendance. Mais si cette mesure a du sens en finance (où les lois Gaussiennes ou elliptiques sont très utilisées), elle ne s'avère plus pertinente en assurance. Ceci est d'ailleurs généralement le cas dès que l'on considère des variables aléatoires positives. La Figure 1 montre un couple de variables exponentielles, dont on aurait bien du mal à dire si elles sont corrélées ou pas, et ce que vaut la corrélation.

Rappelons que la corrélation r entre deux variables aléatoires X et Y de variance finie s'écrit

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}},$$

ou de manière équivalente

$$r(X, Y) = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]}{\sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))^2]}}$$

dès lors que $\text{Var}(X), \text{Var}(Y) < \infty$. Si en finance il est d'usage d'étudier la volatilité d'un rendement, il n'est pas rare d'avoir des coûts de sinistres de variance infinie, par exemple en incendies entreprises, ou en perte d'exploitation. Il paraît troublant qu'on ne puisse pas évoquer de corrélation entre deux risques, sous prétexte que les queues de distributions (marginales) sont trop épaisses.

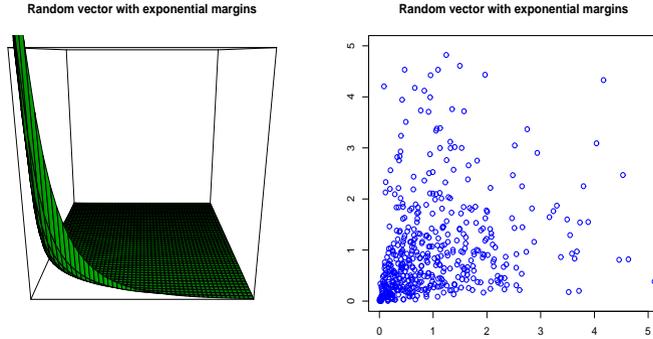


FIG. 1 – Couple (X, Y) de variables exponentielles.

Un autre souci est lié à l’interprétation de cette corrélation, à supposer qu’elle existe. En effet, d’après l’inégalité de Schwarz, $r(X, Y) \in [-1, +1]$. Mais les bornes ne sont pas forcément atteinte. En particulier $r(X, Y) = +1$ si et seulement si $Y = aX + b$: il doit exister une relation *affine* entre X et Y . En fait, il est possible de montrer que (Nelsen (1999))

$$r_{\min} = \frac{\text{cov}[F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(1 - U)]}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}} \leq r(X, Y) \leq \frac{\text{cov}[F_X^{-1}(U), F_2 Y^{-1}(U)]}{\sqrt{\text{Var}[X_1]\text{Var}[Y]}} = r_{\max}$$

où $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$. Un exemple de ces bornes est obtenu dans le cas où $X \sim \mathcal{LN}(0, 1)$ et $Y \sim \mathcal{LN}(0, \sigma)$, alors, $(F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(1 - U))$ a la même distribution que $(\exp Z, \exp(-\sigma Z))$, où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Aussi,

$$r_{\min} = \frac{\exp(-\sigma) - 1}{\sqrt{(e - 1)(\exp(\sigma^2) - 1)}} \text{ et } r_{\max} = \frac{\exp(\sigma) - 1}{\sqrt{(e - 1)(\exp(\sigma^2) - 1)}}.$$

Ces deux bornes peuvent être visualisées sur la Figure 2.

Enfin, rappelons qu’une corrélation nulle - ou statistiquement très faible - n’indique pas grand chose. Considérons l’exemple suivant, utilisé en modélisation du risque de crédit. Soient X_1, \dots, X_{1000} des variables indicatrices indiquant des défauts d’émetteurs dans un portefeuille de crédit, à horizon d’un an,

$$X_i \sim \mathcal{B}(p), \text{ où } p \text{ est à la probabilité de défaut} = 10\%.$$

Dans le cas où les émetteurs sont supposés indépendants, le nombre de défauts dans le portefeuille N vérifie $N = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$, une loi binomiale.

La Figure 3 montre ainsi la distribution de N dans le cas indépendant et dans un cas non-indépendant, avec pourtant une corrélation quasiment nulle, puisque $r(X_i, X_j) = 0.005$.

Notons d’ailleurs qu’une corrélation positive ne suffit pas à définir une notion de “*dépendance positive*”. La notion la plus classique de dépendance positive est dite de “*dépendance positive*”.

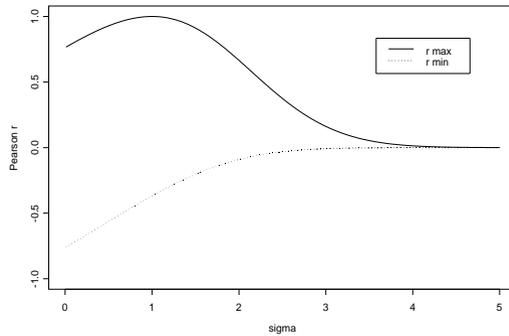


FIG. 2 – Bornes pour la corrélation (au sens de Pearson) entre $X \sim \mathcal{LN}(0, 1)$ et $Y \sim \mathcal{LN}(0, \sigma)$, en fonction de σ .

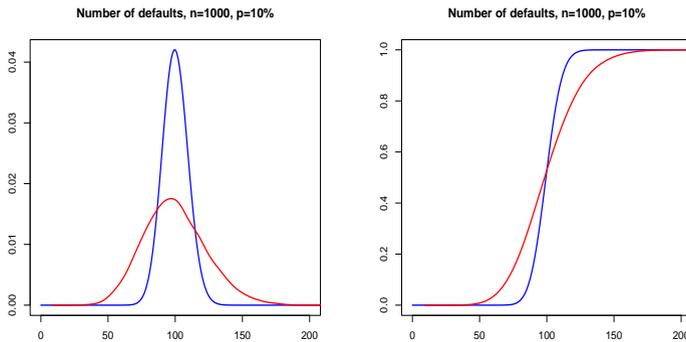


FIG. 3 – Impact de la corrélation sur le nombre de défauts dans un portefeuille obligataire, $r = 0$ versus $r = 0.005$.

par quadrant” : un couple (X, Y) est dit à dépendance positive si et seulement si

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) \geq \mathbb{P}(X > x) \times \mathbb{P}(Y > y) = \mathbb{P}(X^\perp > x, Y^\perp > y),$$

pour tout x, y , ou de manière équivalente

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \geq \mathbb{P}(X \leq x) \times \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^\perp \leq x, Y^\perp \leq y),$$

où le terme de droite correspond au cas indépendant. On peut visualiser cette notion sur la Figure 4.

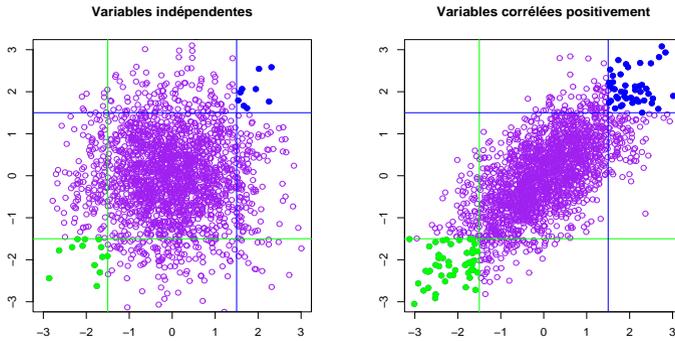


FIG. 4 – La notion de dépendance positive par quadrant.

3 Copules et rangs

Définition 1 En dimension 2, une “copule” C est une fonction de répartition sur $[0, 1]^2$ dont les lois marginales sont uniformes sur $[0, 1]$.

Si (U, V) est un couple dont les lois marginales sont uniformes sur $[0, 1]$, notons $C(u, v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v)$, la fonction de répartition associée. Comme C est une fonction de répartition sur $[0, 1]^2$, $C(0, v) = C(u, 0) = 0$ pour tout $u, v \in [0, 1]$ car $\mathbb{P}(U \leq 0) = \mathbb{P}(V \leq 0) = 0$, et de plus, $C(1, 1) = 1$. De plus, comme les lois marginales sont uniformes, $C(1, v) = \mathbb{P}(U \leq 1, V \leq v) = \mathbb{P}(V \leq v) = v$ (car $\{U \leq 1\}$ est un évènement certain) pour tout $u, v \in [0, 1]$. Enfin, C vérifie une propriété de “croissance” car \mathbb{P} est une mesure positive : pour tout $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, $\mathbb{P}(u_1 < U \leq u_2, v_1 < V \leq v_2) \geq 0$ se traduit par une relation de la forme

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Définition 2 De manière analytique, C est une copule si et seulement si $C(0, v) = C(u, 0) = 0$, $C(u, 1) = u$ et $C(1, v) = v$ pour tout u, v , avec la propriété de croissance suivante

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0,$$

pour tout $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$.

La Figure 5 permet de visualiser ainsi une copule, avec à gauche les propriétés de la fonction C , et à droite une visualisation d’une telle fonction. La Figure de droite représente la densité associée à cette fonction de répartition (si elle existe), qui correspond à la dérivée partielle $c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$.

Ces fonctions copules sont intéressantes de part le théorème de Sklar (Sklar (1959)). Si C est une copule et si F_X et F_Y sont deux fonctions de répartition (unidimensionnelles), alors

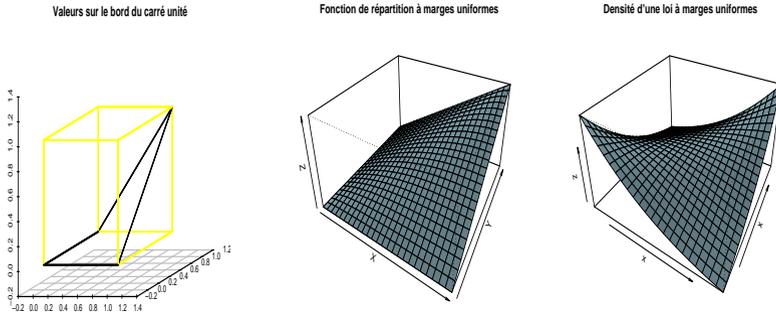


FIG. 5 – Valeur de la fonction copule sur les bords du carré unité $[0, 1]^2$, exemple de copule, avec la fonction de répartition au centre, et la densité associée à droite.

$F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$ est une fonction de répartition dans la classe de Fréchet $\mathcal{F}(F_X, F_Y)$, c’est à dire dont les lois marginales sont précisément F_X et F_Y . Et réciproquement, si $F \in \mathcal{F}(F_X, F_Y)$, il existe une copule C telle que $F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$. De plus, si F_X et F_Y sont continues, alors C est unique et donnée par

$$C(u, v) = F(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)) \text{ pour tout } (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

On peut alors parler de *la copule de F* , ou *la copule du couple (X, Y)* . Plus précisément dans ce cas, notons que C est alors la fonction de répartition du couple (U, V) où $U = F_X(X)$ et $V = F_Y(Y)$.

Remarque 3 Au lieu de coupler les fonctions de répartition sous la forme

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = C(\mathbb{P}(X \leq x), \mathbb{P}(Y \leq y))$$

notons que nous aurions pu coupler les fonctions de survie, au sens où

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = C^*(\mathbb{P}(X > x), \mathbb{P}(Y > y)).$$

La fonction C^* est également une copule, que l’on appellera *copule de survie du couple (X, Y)* . Notons que si C est la fonction de répartition d’un couple (U, V) , alors C^* sera la fonction de répartition d’un couple $(1 - U, 1 - V)$.

Une classe particulièrement importante de copules est la classe des copules “Archimédiennes”. Soit $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ une fonction décroissante convexe, telle que $\phi(0) = \infty$ et $\phi(1) = 0$, alors $C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$, est une copule.

Exemple 4 Si $\phi(t) = t^{-\theta} - 1$, alors $C(u, v) = (u^\theta + v^\theta - 1)^{-1/\theta}$. On parlera de *la copule de Clayton*.

Exemple 5 Si $\phi(t) = (-\log t)^{-\theta}$, $C(u, v) = \exp\left(-\left[(-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta\right]^{1/\theta}\right)$. On parlera de la copule de Gumbel.

On peut aussi construire une autre classe de copules - obtenue par exemple dans la modélisation probit multivariée : les copules elliptiques, induites par les lois elliptiques en dimension 2.

Exemple 6 Pour $\alpha \in (-1, 1)$, on considère la copule C induite par le vecteur (X, Y) gaussien centré réduit, de corrélation α . Alors

$$C(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp\left\{-\frac{(x^2 - 2\alpha xy + y^2)}{2(1-\alpha^2)}\right\} dx dy.$$

On parlera de la copule Gaussienne.

Exemple 7 Pour $\alpha \in (-1, 1)$ et $\nu \geq 2$, on considère la copule C induite par le vecteur (X, Y) de Student (t) centré réduit, de corrélation α , à ν degrés de liberté. Alors

$$C(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \left(1 + \frac{x^2 - 2\alpha xy + y^2}{2(1-\alpha^2)}\right)^{-(\nu+2)/2} dx dy.$$

On parlera de la copule t de Student.

D'un point de vue statistique, les lois marginales ne sont pas connues, et il convient de substituer une estimation de ces fonctions de répartition. Etant donné un échantillon $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$, considérons les fonctions de répartition empiriques,

$$\widehat{F}_X(x) = \frac{\#\{\text{observations } X_i \text{ plus petites que } x\}}{\#\{\text{observations}\}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_i \leq x).$$

On notera en particulier que

$$\widehat{F}_X(X_j) = \frac{\#\{\text{observations } X_i \text{ plus petites que } X_j\}}{\#\{\text{observations}\}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_i \leq X_j) = \frac{R_j}{n},$$

où R_j désigne le rang de X_j au sein de l'échantillon $\{X_1, \dots, X_n\}$.

La version empirique de l'étude de la distribution du couple $(F_X(X), F_Y(Y))$ est l'étude de la distribution des pseudo-observations $\{(\widehat{F}_X(X_i), \widehat{F}_Y(Y_i)), i = 1, \dots, n\}$, ce qui correspond - à un facteur $1/n$ près - à la loi jointe des rangs.

4 Visualisation de la densité : application aux données coûts-frais de sinistres

Comme toujours en statistique, une des méthodes les plus naturelles pour visualiser la distribution de variables aléatoires est de représenter la densité - si possible une estimation non-paramétrique de cette densité afin d'éviter les erreurs (possibles) de modèles.

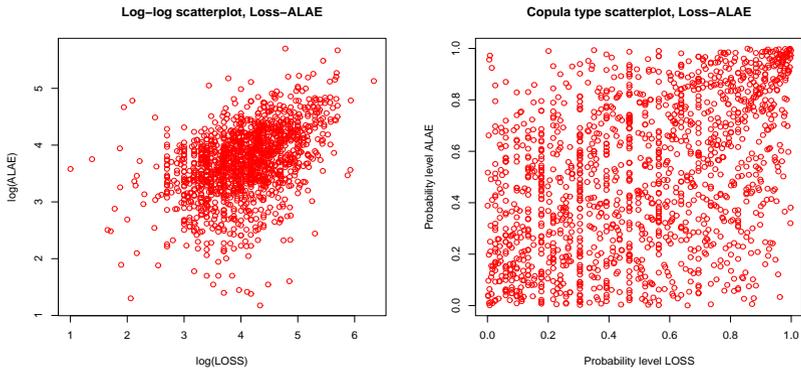


FIG. 6 – Coûts des sinistres et frais associés, en échelle logarithmique, et rangs à droite (copula-type scatterplot).

Considérons l'exemple des coûts de sinistres versus les frais associés. On se doute qu'une corrélation positive existe, mais on souhaite en savoir plus, en particulier pour modéliser les primes de réassurance évoquée dans l'introduction. La Figure 6 représente la base évoquée dans Klugman et Parsa (1999) avec 1500 sinistres.

Au delà de l'intuition d'une forte dépendance dans la queue supérieure (les plus gros sinistres étant associés aux frais les plus importants), la visualisation est plus délicate. On peut ainsi représenter l'histogramme associé (Figure 7)

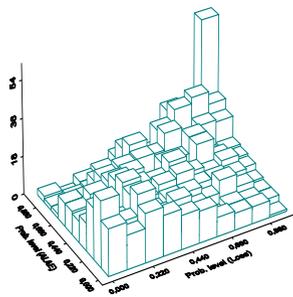


FIG. 7 – Histogramme des rangs des coûts des sinistres et des frais associés.

Mais cet histogramme manquant de régularité, il peut être intéressant (et naturel) de vou-

loir étudier une version lissée par noyau. Mais comme cela était évoqué dans Charpentier, Fermanian et Scaillet (2006), les estimateurs à noyaux (usuels, à noyau symétrique) sont particulièrement inefficace si les données sont bornées, et c’est le cas dès lors que l’on se place sur le carré unité. La densité en $(0, 0)$ ou en $(1, 1)$ est alors sous-estimée par un facteur $1/4$ si l’on considère un noyau symétrique.

$$\widehat{c}(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K \left(X_i, \frac{u}{b} + 1, \frac{1-u}{b} + 1 \right) \cdot K \left(Y_i, \frac{v}{b} + 1, \frac{1-v}{b} + 1 \right),$$

où $K(\cdot, \alpha, \beta)$ est la densité de la loi Beta de paramètres α et β .

La Figure 8 présente ainsi sur ces mêmes données l’estimation de la densité par noyau.

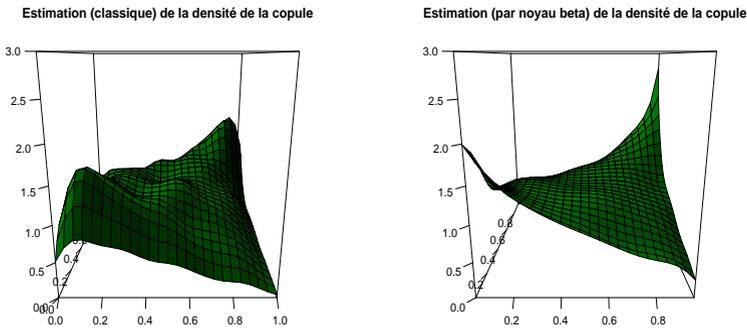


FIG. 8 – Visualisation de la densité de copule, avec un estimateur à noyau symétrique (classique) et un noyau beta.

5 Corrélation entre risques extrêmes

Un point particulièrement important est celui de la corrélation entre risques extrêmes. On se doute qu’une corrélation *globale* n’a que peu d’intérêt, si l’on s’intéresse à des scénarios de contagion de crises en finance, ou de grands risques en réassurance.

Joe (1993) avait proposé d’utiliser la mesure de dépendance de queue suivante. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires et posons

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(u) | Y \leq F_Y^{-1}(u)),$$

et

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \mathbb{P}(X > F_X^{-1}(u) | Y > F_Y^{-1}(u)),$$

si ces limites existent. On parlera alors de dépendance dans la queue inférieure (*Lower*) et supérieure (*Upper*) respectivement. Ces mesures ne dépendent alors pas des lois marginales,

et on peut les définir à l'aide des copules, i.e.

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} \text{ et } \lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{C^*(u, u)}{1 - u},$$

où C^* est la copule de survie du couple (X, Y) .

Si $\lambda = 0$, on parlera d'indépendance entre extrêmes, et on dira que les risques extrêmes sont corrélés si $\lambda \in]0, 1]$.

Exemple 8 Si (X, Y) est un vecteur gaussien de corrélation $r(X, Y) < 1$, alors $\lambda_U = 0$. Si (X, Y) admet pour une copule de Gumbel, de paramètre $\theta > 1$, alors $\lambda_U > 0$. La Figure 9 compare ainsi les queues de distribution, pour une copule Gaussienne très très corrélées globalement (corrélation de 0.95), et une copule de Gumbel qui globalement se rapproche plus de l'indépendance. On notera que la copule de Gumbel présente effectivement plus de scénarios extrêmes que la copule Gaussienne.

6 Application : mise à jour de prime d'assurance

En assurance, la *prime pure* correspond à l'espérance mathématique de la sinistralité pour un contrat. Pascal et Fermat au XVIIIème siècle avaient déjà proposé d'utiliser ce "*produit scalaire entre les probabilités et les gains*" pour trouver le prix d'un jeu, ou plutôt le *prix juste* pour reprendre les termes de Feller (1943). Quételet avait d'ailleurs noté voilà plus d'un siècle que cette valeur espérée avait une interprétation directe en assurance comme le prix assurant un équilibre financier, en moyenne. Cette espérance trouve d'ailleurs beaucoup de justification en statistiques (cf Denuit et Charpentier (2005)), puisqu'il s'agit de la constante approchant le mieux une variable aléatoire, au sens L^2 , mais aussi des propriétés asymptotiques via la loi des grands nombres ou le théorème central limite.

Afin d'éviter les problèmes d'antisélection, il convient néanmoins de *segmenter* les primes, en prenant en compte des caractéristiques permettant de révéler de l'information sur la sinistralité à venir. Par exemple en assurance automobile, lors de la tarification *a priori*, il est possible d'utiliser des informations comportementales (âge et sexe du conducteur, ancienneté du permis, lieux d'habitation et de travail...) ou liées au véhicule (puissance, âge, vitesse de pointe, carburant...). Des méthodes de scoring ou de régression permettent alors d'attribuer un prix à tout client se présentant.

Lors d'un changement de grille tarifaire, on peut ainsi, en regroupant des classes, en changeant le découpage de variables continues, ou en utilisant d'autres variables tarifaires, changer significativement le prix, à caractéristiques idéntiques. La Figure 10 montre ainsi l'ancien prix (sur l'axe horizontal) et le nouveau prix (sur l'axe vertical), sur une population test. La figure de gauche représente le nuage des prix des 12 000 polices, $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$, et à droite le nuage de points des rangs, $(U_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ où

$$U_i = \widehat{F}_X(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(X_j \leq X_i) \text{ et } V_i = \mathbb{F}_Y(Y_i).$$

Les traits sur la figure de droite correspondent à une régression quantile sur les rangs.

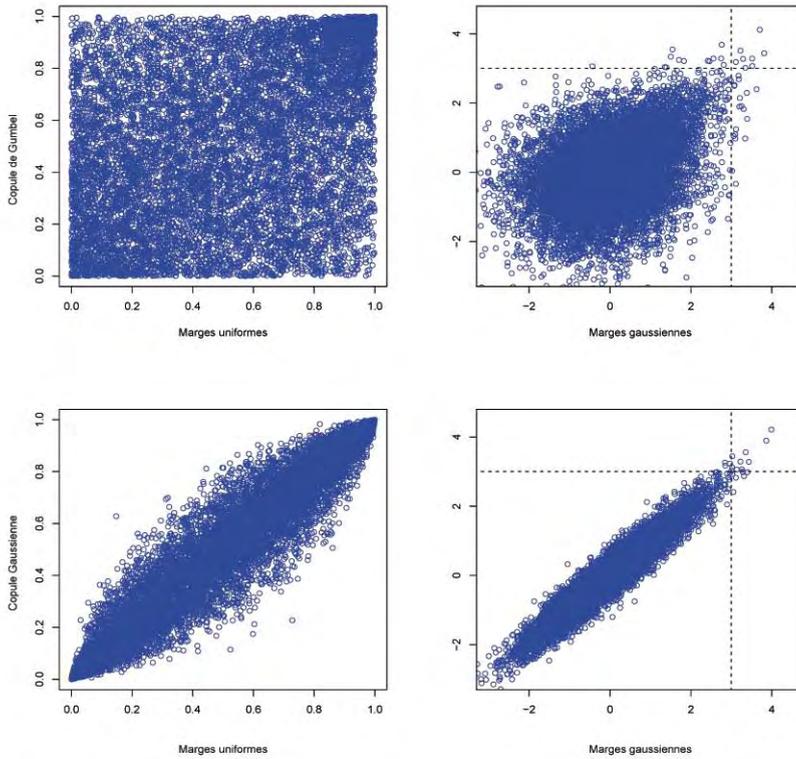


FIG. 9 – Simulations d’une copule de Gumbel, $\theta = 1.2$, en haut, et simulation d’une copule de Gaussienne, $\alpha = 0.95$, en bas.

La Figure 11 présente l’estimation par noyau Beta de la densité de la copule associée, c’est à dire du nuage des points $(U_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$. Au delà de la dépendance positive (rassurante) qui pouvait être visualisée sur le nuage des prix, on peut ici mieux comprendre la “*corrélation*” entre l’ancien et le nouveau prix. L’asymétrie de la copule, avec davantage de poids sous la première diagonale s’interprète de la manière suivante : si les primes anciennement très élevées ont de très grandes chances d’être encore très élevées, c’est moins le cas pour les petites primes. En particulier les primes élevées (dernier décile) ont 95% de chances de rester dans les 5 derniers déciles, alors que les petites primes (premier décile) ont 95% de chances de rester dans les 8 premiers déciles.

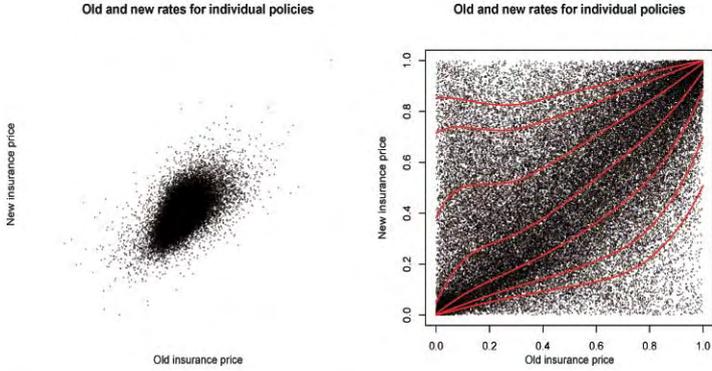


FIG. 10 – Ancien prix versus nouveau prix, par changement de modèle de tarification, avec les prix à gauche, et les rangs à droite.

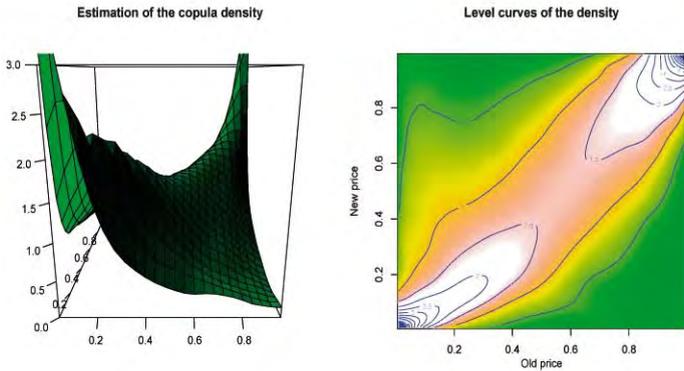


FIG. 11 – Ancien prix versus nouveau prix, densité de la copule

Références

Charpentier, A., Fermanian, J.D., Scaillet, O., 2006. Copula methods in derivatives and risk management : from credit risk to market risk. *in* The estimation of copulas : theory and practice. Risk Book.

Denuit, M., Charpentier, A., 2004. Mathématiques de l'assurance non-vie, Tome 1. Economica.

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R., 2005. Actuarial theory for dependent risks.

Wiley.

Frees, E., Valdez, E., 1995. Understanding Relationships Using Copulas, North American Actuarial Journal, 2, 1-25.

Klugman, S.A., Parsa, R. 1999. Fitting Bivariate Loss Distributions with Copulas. Insurance : Mathematics and Economics, 24, 139-148.

Nelsen, R., 1999. An introduction to copulas. Springer.

Sklar, A., 1959. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris, 8, 229-231.

Summary

This paper presents an important tool for modeling and visualizing risk dependence: copulas. Since correlation has no motivation in insurance, more general concepts are necessary, and we will see that ranks have particularly interesting properties. Furthermore, we will also mention correlation in tails, i.e. correlation between extremal events, which is a crucial issue in risk management.

